ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HẰNG

BAO ĐA CỰC
VÀ TẬP ĐA CỰC ĐẦY TRONG $\mathbb{C}^n$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HẰNG

BAO ĐA CỰC
VÀ TẬP ĐA CỰC ĐẦY TRONG $\mathbb{C}^n$

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH NGUYỄN QUANG DIỆU

Thái Nguyên – 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực, không trùng lặp với các đề tài khác và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Hằng

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu (Đại học Sư Phạm Hà Nội I). Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều thầy đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu nhà trường, Ban Chủ nhiệm khoa toán, ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K22 (2015 - 2016) Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho em hoàn thành khóa học.

Em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Do năng lực còn hạn chế nên khóa luận không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Hằng

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

Mở đầu **1**

Kiến thức chuẩn bị **2**

1 Kiến thức chuẩn bị **2**

1.1 Hàm điều hòa dưới, đa điều hòa dưới 2

1.2 Miền giả lồi 8

1.3 Tập đa cực 9

1.4 Bao đa cực 12

1.5 Dòng dương, đóng 15

1.6 Toán tử Monge–Ampere 16

1.7 Độ đo điều hòa 18

2 Bao đa cực và tập đa cực đầy trong $\mathbb{C}^n$ **20**

2.1 Tập đa cực và bao đa cực đầy trong $\mathbb{C}^n$ 20

2.2 Bao đa cực của đồ thị trong $\mathbb{C}^n$ 25

Kết luận chung **32**

Tài liệu tham khảo **33**

Mở đầu

Hàm đa điều hòa dưới là một đối tượng quan trọng của giải tích phức nhiều biến và của lý thuyết đa thế vị. Tập cực của một hàm đa điều hòa dưới được định nghĩa là phần mà trên đó hàm bằng $-\infty$. Do log, modun của một hàm chỉnh hình là hàm đa điều hòa dưới nên tập cực của hàm đa điều hòa dưới (hay còn gọi là tập đa cực) là mở rộng tự nhiên của khái niệm tập giải tích. Nghiên cứu bao đa cực của một tập cực chính là mô tả sự mở rộng các tập đa cực đó cũng tương tự như mở rộng các tập giải tích. Luận văn trình bày lại một số kết quả của Nguyễn Quang Diệu và Phạm Hoàng Hiệp về bao đa cực trong trường hợp nhiều chiều ($\mathbb{C}^n, n \geq 2$). Ngoài kiến thức chuẩn bị trong chương I chủ yếu về khái niệm hàm điều hòa dưới, đa điều hòa dưới, miền giả lồi, dòng dương đóng và toán tử Monge - Ampere, trong chương II chúng tôi trình bày cấu trúc của bao đa cực của đồ thị một hàm chỉnh hình trên phần bù của một tập giải tích (Định lý 2.1.3 và Định lý 2.2.1) và một kết quả tổng quát về hợp của hai tập đa cực đầy trong những miền khác nhau cũng là tập đa cực đầy trên một miền rộng hơn (Định lý 2.1.1).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Hàm điều hòa dưới, đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử X là không gian tôpô. Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X .

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử D là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : D \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên D nếu nó nửa liên tục trên trên D và thoả mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên D, nghĩa là với mọi $\omega \in D$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho với mọi $0 \leq r \leq \rho$ ta có

$$u(\omega) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega + re^{it})dt. \tag{1.1}$$

Chú ý rằng với định nghĩa trên thì hàm đồng nhất $-\infty$ trên D được xem là hàm điều hòa dưới trên D. Ta ký hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên D là $SH(D)$. Sau đây là ví dụ đáng chú ý về hàm điều hòa dưới.

Bổ đề 1.1.3. *Nếu $f : D \to \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình trên D thì* $\log |f|$ *là hàm điều hòa dưới trên D.*

Chứng minh. Trường hợp $f \equiv 0$ thì kết quả là rõ ràng. Giả sử $f \not\equiv 0$ trên D. Khi đó rõ ràng $\log|f|$ là hàm nửa liên tục trên D. Nếu $f(z_0) \neq 0$ thì chọn $\delta > 0$ sao cho $f \neq 0$ trên $\mathbb{B}(z_0, \delta) = \{z \in D : |z - z_0| < \delta\}$. Khi đó $\log|f|$ là hàm điều hòa trên $\mathbb{B}(z_0, \delta) = \{z \in D : |z - z_0| < \delta\}$ nên (1.1) được thỏa mãn với dấu đẳng thức.
Trường hợp $f(z_0) = 0$. Khi đó $\log|f(z_0)| = -\infty$ và do đó (1.1) luôn đúng. $\square$

Định lý sau đây cho thấy tính điều hòa dưới là bất biến qua ánh xạ chỉnh hình giữa các tập mở trong $\mathbb{C}$.

Định lý 1.1.4. *Giả sử $f : D_1 \to D_2$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai tập mở trong $\mathbb{C}$. Nếu u là hàm điều hòa dưới trên D_2 thì $u \circ f$ là hàm điều hòa dưới trên D_1.*

Chứng minh. Vì tính điều hòa dưới là tính địa phương nên chỉ cần chứng minh $u \circ f$ là điều hòa dưới trên mỗi miền co compact tương đối $E_1 \Subset D_1$. Giả sử E_1 là miền như vậy. Khi đó $E_2 = f(E_1) \Subset D_2$. Chọn dãy hàm điều hòa trơn $\{u_n\} \in C^\infty(E_2)$ sao cho $u_n \searrow u$ trên E_2. Ta có $\Delta u_n \geq 0$ trên E_2 với mọi $n \geq 1$. Ta có

$$\Delta(u_n \circ f) = (\Delta(u_n) \circ f)|f^{'}|^2 \quad \text{trên} \quad D_1.$$

Do đó $u_n \circ f$ là hàm điều hòa dưới trên E_1. Nhưng $u_n \circ f \searrow u \circ f$ trên E_1 nên $u \circ f$ là hàm điều hòa dưới trên D_1 và định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử $D \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, $u : D \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của D. Hàm u gọi là đa điều hòa dưới trên D nếu với mọi $a \in D$ và $b \in \mathbb{C}^n$, hàm $\lambda \longmapsto u(a + \lambda b)$ là điều hòa dưới hoặc bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in D\}$.

Ký hiệu $PSH(D)$ là tập các hàm đa điều hòa dưới trong D. Ta có một số tính chất của hàm đa điều hòa dưới như sau:

+) Nếu $u \in PSH(D)$ thì $e^u \in PSH(D)$.

+) Nếu $u \in PSH(D), u \geq 0$ và $\alpha \geq 1$ thì $u^\alpha \in PSH(D)$.

+) Nếu u_1, u_2 là các hàm không âm trên tập mở $D \subset \mathbb{C}^n$ và $\log u_1, \log u_2 \in PSH(D)$ thì $u_1, u_2 \in PSH(D)$ và $\log(u_1 + u_2) \in PSH(D)$.

Định lý 1.1.6. *Giả sử $u : X \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của $D \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó $u \in PSH(D)$ khi và chỉ khi với mọi $a \in D, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho*

$$\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset D$$

ta có

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta} b) d\theta := l(u, a, b).$$

Chứng minh. Điều kiện cần: Là hiển nhiên suy ra từ Định nghĩa 1.1.5.

Điều kiện đủ: Giả sử $a \in D, b \in \mathbb{C}^n$ và xét

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in D\}.$$

Khi đó U là tập mở trên $\mathbb{C}$. Đặt $v(\lambda) = u(a + \lambda b), \lambda \in U$. Cần chứng minh $v(\lambda)$ là điều hòa dưới trên U. Muốn vậy chỉ cần chứng tỏ nếu $\lambda_0 \in U$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho $0 \leq r < \rho$ thì

$$v(\lambda_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Từ $a + \lambda_0 b \in U$, nếu có $\rho > 0$ sao cho khi $|\lambda| < \rho$ thì $a + \lambda_0 b + \lambda b \in D$. Với $0 \leq r < \rho$ ta có $\{a + \lambda_0 b + \lambda r b : |\lambda| \leq 1\} \subset D$. Do đó từ giả thiết

$$u(a + \lambda_0 b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \lambda_0 b + rbe^{i\theta}) d\theta.$$